Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1*(adapté de ENSAIT 1988)**Partie I*

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications f continues sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f^2(t) dt$ converge.

1. (a) Montrer que, pour tous réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$
 (b) Montrer que tout élément f de F appartient à E .
 (c) En déduire que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

2. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ où $\alpha > 0$.

$$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$$

Pour quelles valeurs de α , f est-elle un élément de F ?

3. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ où $\alpha > 0$.

$$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$$

Pour quelles valeurs de α , f est-elle un élément de F ?

4. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ où $n \in \mathbb{N}$.

$$t \mapsto \ln(t)^n$$

f est-elle un élément de E ? de F ?

Partie II

Soit G le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications f continues sur $]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

1. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \frac{\ln^n(t)}{(1-t)^\alpha}$$

Déterminer à quelle condition sur α et n , f est un élément de G .

2. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}$$

(a) Montrer que f est un élément de G .

- (b) Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ sur $]0, 1[$.
- (c) On note $I = \int_0^1 f(t) dt$. Montrer que $I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$

On pourra poser le changement de variable $x = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

- (d) Déterminer quatre réels (a, b, c, d) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

- (e) En déduire la valeur de I via une intégration par parties

Exercice 2

(Banque PT, Maths C 2022)

1. Pour tout entier naturel non nul, n , on pose :

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$$

- (a) Étudier, pour tout entier naturel non nul n , la convergence de l'intégrale H_n .
- (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^{2n} du$
- (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$
- (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$

2. Pour tout entier naturel non nul n , et tout réel strictement positif x , on note ${}^{2n}\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2n}}$.

On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} {}^{2n}\sqrt{\tan x} dx, \quad , \quad I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} {}^{2n}\sqrt{\tan x} dx$$

- (a) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0_+} {}^{2n}\sqrt{x}$?
- (b) Étudier, pour tout entier naturel non nul n , la convergence des intégrales K_n et L_n .
- (c) Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée.
- (d) Étudier le sens de variation de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (e) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} {}^{2n}\sqrt{\tan x} dx \geq \frac{\pi}{4}$$

- (f) En déduire la convergence de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$$

3. (a) Pour tout entier naturel non nul n , effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x = u^{2n}$ dans l'intégrale $(K_n + L_n)$, puis donner, pour tout entier naturel non nul, une relation entre $(K_n + L_n)$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$$

- (b) En déduire l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{H}{n}$$

Exercice 3

(adapté de Centrale PC 2015)

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

Si f est un endomorphisme de E , pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f , c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F .

Partie I

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. (a) i. Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f .
 ii. Montrer qu'il existe au moins un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
On pourra considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (y, -x)$.
- (b) i. Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
 ii. Déterminer les sous-espaces stables de l'endomorphisme canoniquement associé à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
2. (a) Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est un sous-espace stable par f
 (b) Montrer que s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\dim \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \geq 2$, alors il existe une infinité de droites de E stables par f .
 (c) On suppose **dans cette question uniquement** que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f .

Soit x et y deux vecteurs non nuls de E

- i. Montrer que si x et y sont colinéaires, alors il existe un réel α tel que $f(x) = \alpha x$ et $f(y) = \alpha y$.
- ii. Montrer que si (x, y) est libre, alors il existe un réel α' tel que $f(x + y) = \alpha'(x + y)$ et $f(y) = \alpha'y$ et $f(x) = \alpha'x$.
- iii. Que dire alors de f ?

Partie II

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , tel qu'il existe un entier p et un p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts vérifiant

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ et $E_i \neq \{0_E\}$.

1. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

(a) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ est stable par f .

(b) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F .

Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

(c) Si on pose $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les espaces vectoriels E_i , on peut supposer que $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$ avec $1 \leq r \leq p$. Ainsi on a $x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$.

On pose $V_x = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.

Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .

(d) Montrer que pour tout j de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

(e) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .

- (f) En déduire que pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, x_i appartient à F et conclure.
2. Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.
- (a) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.
- (b) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?
- (c) Si $n \geq 3$ et $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?
- (d) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

Exercice 4

(adapté de EDHEC ECS 2020)

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$).

Partie I — Préliminaires

1. On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
- (a) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$
- (b) Établir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$
- (c) Notons $r = \text{Rang}(p)$. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad p(e_k) = e_k, \quad \forall k \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \quad p(e_k) = 0_E$$

- (d) En écrivant la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, montrer que

$$\text{Rg}(p) = \text{Tr}(p)$$

2. Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Partie II — C.N.S. pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que $q = p_1 + p_2$ soit un projecteur.

1. Montrer que, si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors q est un projecteur.

On suppose désormais que q est un projecteur.

2. (a) Montrer que $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$
- (b) Justifier que $\text{Rang}(q) = \text{Rang}(p_1) + \text{Rang}(p_2)$ et que $\dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)) \leq \dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2))$
- (c) En déduire que $\text{Im}(q) = \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$ puis que $\text{Im}(p_1 + p_2) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2)$
3. (a) Soit $x \in E$, montrer que $p_1(x) \in \text{Ker}(q - \text{Id})$.
- (b) En déduire que $q \circ p_1 = p_1$ et $q \circ p_2 = p_2$.
- (c) En déduire qu'alors $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
4. Conclure

Partie III — Généralisation

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E , notés $p_1, p_2, \dots, p_k$ et on note $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$. On veut généraliser le résultat précédente à une somme de $k \geq 2$ projecteurs.

1. Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. (a) Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
- (b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{Rang}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
- (c) Établir finalement l'égalité

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

3. (a) Montrer que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
- (b) En déduire que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0$.
- (c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Conclure quant à l'objectif de cette partie.